Berechnung der Lichtmenge, die von einem gegebenen leuchtenden Punkt auf ein gegebenes Ellipsoid fällt.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

August Kiel
aus Geisa in Sachsen-Weimar.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1882.

Berechnung der Richtungen,
die von einem gegebenen leuchtenden Punkt
auf ein gegebenes Ellipsoid fallen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

Hochlöblicher Philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

August Reiel

aus Cöln in Berlin a-Werder.

Marburg

Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich)

1894

VII.

Berechnung der Lichtmenge, die von einem gegebenen leuchtenden Punkt auf ein gegebenes Ellipsoid fällt.

Von

August Kiel.

Wenn man um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius 1 beschreibt und gleichzeitig von ihm aus einen Tangentenkegel an das gegebene Ellipsoid legt, so ist derjenige Teil der Kugeloberfläche, welchen der Tangentenkegel ausschneidet, mit der Lichtmenge proportional, welche auf das Ellipsoid fällt. Setzt man daher diese Lichtmenge $= M$ und den betreffenden Teil der Kugeloberfläche $= O$, so ist:

$$M = k \, . \, O,$$

wo k eine Constante bedeutet. Diese Constante ist ganz von der Natur des Lichtes abhängig. Setzt man dieselbe so voraus, dass die von dem Punkte ausgestrahlte Lichtmenge gleich 4π ist, so ist $k = 1$ und alsdann:

$$M = O.$$

Es kommt somit das vorgelegte Problem darauf hinaus, den Teil der Kugeloberfläche der Berechnung zu unterwerfen, der von dem Tangentenkegel ausgeschnitten wird.

§ 1. Aufstellung der Gleichung des Tangentenkegels.

Die Gleichung des Ellipsoids laute:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

Wenn die Coordinaten des leuchtenden Punktes (x_0, y_0, z_0) sind, so ist die Gleichuug des von ihm an das Ellipsoid gelegten Tangentenkegels:

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)^2-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\times\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)=0$$

Wenn man nun den Mittelpunkt einer Oberfläche 2ter Ordnung zum Coordinatenanfangspunkt wählt, so verschwinden diejenigen Glieder, welche die erste Potenz der Variabeln zu Factoren haben, weil dann jede Coordinalenebene Symmetrieebene der Oberfläche ist. Da nun ausserdem bei dem Kegel der Mittelpunkt auf der Oberfläche selbst liegt, so verschwindet bei dieser Transformation auch das absolute Glied.

Wenn wir daher das Coordinatensystem vom Mittelpunkte des Ellipsoids nach der Spitze des Kegels (x_0, y_0, z_0) parallel mit sich selbst verschieben, so geht die linke Seite obiger Gleichung in eine homogene Function 2ten Grades der Veränderlichen (xyz) über.

Zu dieser Transformation führen die Substitutionen:

$$\begin{aligned} x &= \xi+x_0 \\ y &= \eta+y_0 \\ z &= \zeta+z_0. \end{aligned}$$

Durch Einführung derselben erhält man:

$$\left(\frac{\xi+x_0}{a^2}\cdot x_0+\frac{\eta+y_0}{b^2}\cdot y_0+\frac{\zeta+z_0}{c^2}\cdot z_0-1\right)^2$$
$$-\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)\left\{\frac{(\xi+x_0)^2}{a^2}+\frac{(\eta+y_0)^2}{b^2}+\frac{(\xi+z_0)^2}{c^2}-1\right\}=0$$

Daraus geht alsdann die Gleichung hervor:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\xi x_0}{a^2}+\frac{\eta y_0}{b^2}+\frac{\zeta z_0}{c^2}\right)^2-\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)=0$$

wo

$$\varepsilon = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1$$

bedeutet. Diese Gleichung vereinfacht sich noch mehr, wenn man sie auf die Hauptaxen transformirt. Dieses Problem kommt algebraisch darauf hinaus, die linearen Substitutionen zu bestimmen, welche die Gleichungen:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

und

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2$$

zu identischen Gleichungen machen, wobei $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ die obige Gleichung des Tangentenkegels darstellt. Wenn nun gewisse lineare Substitutionen die homogene Function $\Phi(x, y, z)$ der 2ten Ordnung transformiren in

$$\Phi(x, y, z) = \lambda_0 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_2 Z^2,$$

so transformiren die Auflösungen dieser Substitutionen die reciproke Function $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ in

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2}$$

(s. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, pg. 240 ff.).

Die Transformation der reciproken Function $\Phi(x, y, z)$ giebt somit zugleich die der vorliegenden Function $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ an. Da nun die Gestalt der reciproken Function einfacher ist als die von $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, so ist es vorteilhaft, von jener auszugehen.

Um den Ausdruck für $\Phi(x, y, z)$ aufzustellen, muss man die Substitutionen machen:

$$x = \tfrac{1}{2}\varphi'(\xi)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\varphi'(\eta)$$
$$z = \tfrac{1}{2}\varphi'(\zeta)$$

Alsdann:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\Phi'(x)$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}\Phi'(y)$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}\Phi'(z)$$

$$\Phi(x, y, z) = \tfrac{1}{2}\{x\Phi'(x) + y\Phi'(y) + z\Phi'(z)\}$$

Die hier angedeuteten algebraischen Operationen zur Bestimmung der reciproken Function $\Phi(x, y, z)$ führen wir auf die folgende Art aus.

Wir setzen:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{x_0\xi}{a^2}+\frac{y_0\eta}{b^2}+\frac{z_0\zeta}{c^2}\right)=M$$

Alsdann:

$$x=\frac{x_0}{a^2}M-\frac{\xi}{a^2}$$

$$y=\frac{y_0}{b^2}M-\frac{\eta}{b^2}$$

$$z=\frac{z_0}{c^2}M-\frac{\zeta}{c^2}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\frac{x_0}{\varepsilon}$, $\frac{y_0}{\varepsilon}$, $\frac{z_0}{\varepsilon}$ und addirt dieselben, so erhält man:

$$\frac{1}{\varepsilon}(xx_0+yy_0+zz_0)=\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)M-M.$$

Nun ist aber:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1+\varepsilon,$$

daher:

$$xx_0+yy_0+zz_0=M$$

Mithin:

$$\xi=x_0M-xa^2=x_0(xx_0+yy_0+zz_0)-xa^2$$
$$\eta=y_0(xx_0+yy_0+zz_0)-yb^2$$
$$\zeta=z_0(xx_0+yy_0+zz_0)-zc^2$$

und

$$\Phi(x,y,z)=(xx_0+yy_0+zz_0)^2-(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2)$$

Wir haben somit das Resultat, dass diejenigen Substitutionen, welche die Function

$$(xx_0+yy_0+zz_0)^2-(x^2a^2+x^2b^2+z^2c^2)$$

transformiren in:

$$(xx_0+yy_0+zz_0)^2-(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2)=\lambda_0X^2+\lambda_1Y^2+\lambda^2Z^2$$

die ursprüngliche Function $\varphi(\xi,\eta,\zeta)$ transformiren in:

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{X^2}{\lambda_0}+\frac{Y^2}{\lambda_1}+\frac{Z^2}{\lambda_2}$$

Nun bestimmen sich aber die Grössen λ_0, λ_1, λ_2 bei der reciproken Function $\Phi(x,y,z)$ als die Wurzeln der irreductiblen kubischen Gleichung:

$$\frac{x_0^2}{a^2+\lambda}+\frac{y_0^2}{b^2+\lambda}+\frac{z_0^2}{c^2+\lambda}-1=0$$

Also muss nach Auflösung dieser kubischen Gleichung die endgiltige Gleichung des Tangentenkegls lauten, bezogen auf seine Hauptaxen:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{X^2}{\lambda_0} + \frac{Y^2}{\lambda_1} + \frac{Z^2}{\lambda_2} = 0.$$

§ 2. Directe Methode zur Bestimmung des von dem Tangenkegel aus der Kugeloberfläche ausgeschnittenen Teiles.

Setzt man in der Gleichung des Ellipsoids voraus, dass $a^2 < b^2 < c^2$ ist, und ist $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$, dann liegen bekanntlich die 3 Wurzeln der obigen kubischen Gleichung zwischen folgenden Grenzen:

λ_0 zwischen $-c^2$ und $-b^2$
λ_1 zwischen $-b^2$ und $-a^2$
λ_2 zwischen $-a^2$ und ∞.

Da nun a^2, b^2 und c^2 wesentlich positive Grössen sind, so sind λ_0 und λ_1 negativ, und λ_2 kann sowohl positiv wie negativ sein. Mithin kann man setzen:

$$\lambda_0 = -\alpha^2; \quad \lambda_1 = -\beta^2; \quad \lambda_2 = \pm\gamma^2.$$

Dabei ist $\alpha^2 > \beta^2$ und wenn $\lambda_2 = -\gamma^2$, so $\alpha^2 > \beta^3 > \gamma^2$.

Es lautet demnach die Gleichung des Tangentenkegels:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \mp \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

Bei dieser Gleichung ist jedoch nur das obere Zeichen des letzten Gliedes von geometrischer Bedeutung, da die Gleichung für den Fall des unteren Vorzeichens nur den Coordinatenanfangspunkt darstellt.

Die Gleichung des Tangentenkegels ist also:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

Die Gleichung der Kugeloberfläche ist:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Der Inhalt des gesuchten Flächenstückes ist gegeben durch das Doppelintegral:

$$\iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

wenn dasselbe auf alle Werte von x und y ausgedehnt wird, welche den Punkten der Projection des Flächenstückes auf die xy Ebene entsprechen. Die Gleichung der Begrenzungscurve erhält man aber, wenn man zwischen obigen beiden Gleichungen z eliminirt.

Es lautet daher diese Gleichung:

$$x^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)=\frac{1}{\gamma^2}$$

oder

$$x^2\cdot\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2}+y^2\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}=1$$

Mithin können wir die Gleichung der Begrenzungscurve schreiben:

$$a^2x^2+b^2y^2=1$$

$$a^2=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha^2};\quad b^2=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}.$$

Es ist daher obiges Doppelintegral $\iint\frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ auszudehnen auf alle positiven und negativen Werte von x und y, welche der Bedingung genügen:

$$a^2x^2+b^2y^2\leqq 1.$$

Dehnt man das Integral blos auf die positiven Werte von x und y aus, so erhält man den 4. Teil der Fläche, weil die Begrenzungscurve der xy Projection, über welche die Integration auszudehnen ist, eine Ellipse darstellt, mithin die Integration über den positiven Teil derselben nur den 4. Teil von der ganzen Integration beträgt. Es ist daher die Fläche gleich $4\int_0^{\frac{1}{a^2}}dx\int_0^{\frac{1}{b^2}\sqrt{1-a^2x^2}}\frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Führen wir nun in diesem Integrale 2 neue Variabeln ein, welche mit x und y durch die Gleichungen verbunden sind:

$$x=\frac{1}{a}\cdot\xi$$

$$y=\frac{1}{b}\cdot\eta,$$

so haben ξ und η die Bedingung zu erfüllen:

$$0\leqq\xi^2+\eta^2\leqq 1$$

und das Integral selbst wird:

$$\frac{1}{ab}\int_0^1 d\xi \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}}$$

In diesem Integrale führen wir nun die Substitution ein:

$$\xi = \varrho \cos\omega$$

$$\eta = \varrho \sin\omega.$$

Alsdann ist:

$$\iint \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi}{a}\right)^2-\left(\frac{\eta}{b}\right)^2}} = \iint \frac{\left(\frac{\partial\xi}{\partial\varrho}\frac{\partial\eta}{\partial\omega}-\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}\right) d\varrho\, d\omega}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

$$= \iint \frac{\varrho\, d\varrho\, d\omega}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

Da nun die Integration sich auf alle positiven ξ und η bezieht, für welche:

$$0 \leqq \xi^2+\eta^2 \leqq 1$$

ist, so bleibt der Punkt (ξ, η) innerhalb eines mit dem Radius 1 beschriebenen Kreisquadranten. Führen wir daher für ξ und η die Polarcoordinaten ϱ und ω ein, so muss, damit alle Punkte innerhalb des ersten Quadranten durchlaufen werden:

ϱ von 0 bis 1 und

ω von 0 bis $\frac{\pi}{2}$

gehen. Mithin ist der Inhalt der gesuchten Fläche gleich:

$$\frac{4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^1 \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

Nun

$$\int_0^1 \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}$$

$$= \left[\frac{-a^2b^2\sqrt{1-\varrho^2\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}\right]_0^1$$

$$= \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega} - \frac{a^2b^2\sqrt{1-\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}$$

Daher ist der Inhalt der Fläche gleich:

$$4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega} - 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega\sqrt{1-\left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega}$$

Wir können nun, ohne der Allgemeinheit der nachfolgenden Betrachtungen Eintrag zu tun, voraussetzen, dass $b^2 > a^2$ ist.

Denn im entgegengesetzten Falle brauchten wir nur die Substitutionen:

$$\xi = \varrho\cos\omega, \quad \eta = \varrho\sin\omega$$

zu vertauschen, um in den folgenden Auseinandersetzungen auch a mit b vertauschen zu können.

Ist nun $b^2 > a^2$, so ist das erste Integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{a^2\sin^2\omega+b^2\cos^2\omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{b^2-(b^2-a^2)\sin^2\omega}$$

Substituirt man darin:

$$\operatorname{ctg}\omega = z; \quad \frac{1}{\sin^2\omega} = 1+z^2$$

$$-\frac{d\omega}{\sin^2\omega} = dz; \quad d\omega = -\frac{dz}{1+z^2}$$

$$\omega = 0; \quad z = \infty$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}: \quad z = 0;$$

so folgt aus obigem Integral das andere:

$$\int_0^\infty \frac{dz}{a^2 + b^2 z^2} = \frac{1}{ab}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}z\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2ab}$$

Was das zweite obiger Integrale betrifft, so kann es auf elliptische Integrale zurückgeführt werden. Es ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega \sqrt{1 - \left\{\frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2}\right\}}}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}$$

$$= \frac{1}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega\{b^2(a^2-1) + (b^2-a^2)\sin^2\omega\}}{\{b^2 - (b^2-a^2)\sin^2\omega\}\sqrt{b^2(a^2-1) + (b^2-a^2)\sin^2\omega}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega\left\{1 + \frac{b^2-a^2}{b^2(a^2-1)}\sin^2\omega\right\}}{\{b^2 - (b^2-a^2)\sin^2\omega\}\sqrt{1 + \frac{b^2-a^2}{b^2(a^2-1)}\sin^2\omega}}$$

Setzt man in dem letztgenannten Integrale $\frac{b^2-a^2}{b^2(a^2-1)} = n^2$ und substituirt ferner:

$\sin\omega = \cos\varphi$	
$\cos\omega\, d\omega = -\sin\varphi\, d\varphi$	$\omega = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$
$d\omega = -d\varphi$	$\omega = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = 0$

so geht dasselbe über in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi(1 + n^2\cos^2\varphi)}{\{b^2 - (b^2-a^2)\cos^2\varphi\}\sqrt{1 + n^2 - n^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi(1 + n^2\cos^2\varphi)}{\{b^2 - (b^2-a^2)\cos^2\varphi\}\sqrt{1 - \frac{n^2}{1+n^2}}}$$

$$n^2\cos^2\varphi + 1 : -(b^2-a^2)\cos^2\varphi + b^2 = -\frac{n^2}{b^2-a^2} + \frac{1+\frac{n^2b^2}{b^2-a^2}}{b^2-(b^2-a^2)\cos^2\varphi}$$

$$= -\frac{1}{b^2(a^2-1)} + \frac{a^2}{a^2-1}\cdot\frac{1}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\varphi}$$

Mithin ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+n^2\cos^2\varphi)d\varphi}{\{b^2-(b^2-a^2)\cos^2\varphi\}\sqrt{1-\frac{n^2}{1+n^2}\sin^2\varphi}}$$

$$= -\frac{1}{b^2(a^2-1)} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{1}{a^2-1} \Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{b^2-a^2}{a^2}, k\right)$$

wobei

$$k^2 = \frac{n^2}{1+n^2} = \frac{b^2-a^2}{a^2(b^2-1)} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}$$

$$\frac{b^2-a^2}{a^2} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2} = k^2\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2} \quad \text{ist.}$$

Daher ist endlich:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{\frac{1}{b}\sqrt{1-a^2x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{b^2}{a\sqrt{b^2-1}} \Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right) + \frac{1}{a\sqrt{b^2-1}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right);$$

wobei

$$\frac{1}{a\sqrt{b^2-1}} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}};$$

$$\frac{b^2}{a\sqrt{b^2-1}} = \frac{\alpha(\beta^2+\beta^2)}{\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \quad \text{ist.}$$

Um diese Integrale weiter zu vereinfachen, muss vor Allem das in der Legendre'schen Form geschriebene Integral $\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, k^2\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$ in die Jacobi'sche übersetzt werden. Jacobi bezeichnet nun in der von

ihm gegebenen Normalform der elliptischen Transcendenten der 3ten Gattung den Parameter n $\left(\text{bei uns } = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)$ mit $-k^2 \sin^2 \text{am } A$.

Es ist klar, dass diese Darstellungsweise nur solange zulässig ist, als $0 > n > -k^2$ ist. Soll sie auch noch dann anwendbar bleiben, wenn n zwischen andere Grenzen fällt, so muss A imagninär werden. Nun liegt in dem vorliegenden Falle n wirklich zwischen anderen Grenzen, nämlich zwischen ∞ und 0, also müssen wir für die Transformation

$$n = -k^2 \sin^2 \text{am } Ai = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

setzen.

Nun:

$$\Pi_1(\varphi, -k^2 \sin^2 \text{am } A) = u + \frac{\text{tg am } A}{\Delta \text{am } A} \Pi(u, A)$$

daher:

$$\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, -k^2 \sin \text{am } Ai\right) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \frac{\text{tg am } Ai}{\Delta \text{am } Ai} \Pi(K, Ai)$$

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Da aber

$$-k^2 \sin^2 \text{am } Ai = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2} = k^2 \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

ist, so

$$\sin \text{am } Ai = \frac{i\gamma}{\beta}$$

$$\cos \text{am } Ai = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\beta}$$

$$\text{tg am } Ai = \frac{i\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

$$\Delta \text{am } Ai = \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}$$

Mithin:

$$\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{\beta^2}\right) = K + \frac{i\beta\gamma\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}{\alpha(\beta^2 + \gamma^2)} \Pi(K, Ai)$$

und folglich das Doppelintegral:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{\frac{1}{b}\sqrt{1-a^2x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - i\Pi(K, Ai) + K\left\{\frac{\alpha\beta}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} - \frac{\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - i\Pi(K, Ai) - \frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} K$$

Und wenn es uns gestattet ist, in der Bezeichnungsweise von Durège fortzufahren, so können wir setzen:

$$\Pi(K, Ai) = KE(iA) - iAE$$

Aber:

$$E(iA) = i\,\mathrm{tg\,am}(A, k')\,\Delta\,\mathrm{am}(A, k') - iE(A, k') + iA$$

Daher:

$$\Pi(K, Ai) = i\,\mathrm{tg\,am}(A, k')\,\Delta\,\mathrm{am}(A, k')K - iKE(A, k') + iAK - iAE.$$

Nun:

$$i\,\mathrm{tg\,am}(A, k') = \sin\mathrm{am}\,Ai$$

$$= i\frac{\gamma}{\beta}$$

also:

$$\mathrm{tg\,am}(A, k') = \frac{\gamma}{\beta},$$

ferner:

$$\sin^2\mathrm{am}(A, k') = \frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

$$1 - k'^2\sin^2\mathrm{am}(A, k') = 1 - \left(1 - \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\gamma^2}$$

Mithin:

$$i\,\mathrm{tg\,am}(A, k').\,\Delta\mathrm{am}(A, k') = i\frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}$$

und folglich obiges Doppelintegral

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}K - KE(A, k') + K.\,A$$

$$- \frac{\alpha\gamma}{\beta\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}K - EA$$

$$= \frac{\pi}{2} - KE(A, k') + (K-E)A$$

Ist nun ferner:

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\mathrm{tg\,am}(A, k') = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\alpha' = \mathrm{am}(A, k')$$

$$A = F(\alpha', k')$$

Ferner bezeichnet Durège mit der elliptischen Function $E(A, k')$ das elliptische Integral:

$$E(\mathrm{am}(A, k')) = E(\alpha', k').$$

Mithin lautet schliesslich der gesuchte Inhalt der Fläche:

$$F = 2\pi - 4\{K.E(\alpha', k') - (K - E)F(\alpha', k')\}.$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck, den wir kurz mit W bezeichnen wollen, schreibt sich noch einfacher in den Thetafunctionen. Zu dieser Umwandlung gelangen wir auf folgendem Wege.

Es ist:

$$\tfrac{1}{2}.\pi.l'\vartheta(\alpha', \nu') = F'.E(\alpha', k') - E'F(\alpha', k')$$

wo

$$F' = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right); \quad E' = E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$$

ist. Nun

$$\frac{F}{F'} = \frac{\nu'}{\pi};$$

daher

$$\tfrac{1}{2}\pi l'\vartheta(\alpha', \nu') = \frac{\pi.FE(\alpha', k')}{\nu'} - E'F(\alpha', k')$$

Ferner ist:

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\frac{\pi}{2} + FF' - EF'}{F} = E'$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{F} + (F - E)\frac{F'}{F} = E'$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{F} + (F - E)\frac{\pi}{\nu'} = E'$$

Daher:

$$\frac{\pi}{2}.l'\vartheta(\alpha', \nu') = \frac{\pi}{\nu'}F.E(\alpha', k') - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{F(\alpha', k')}{F}$$

$$- (F - E).\frac{\pi}{\nu'}.F(\alpha', k')$$

$$\frac{\nu'}{2} l' \vartheta(\alpha',\ \nu') = FE(\alpha',\ k') + EF(\alpha',\ k') - FF(\alpha',\ k') - \frac{\nu'}{2} \cdot \frac{F(\alpha',\ k')}{F}$$

$$\frac{F(\alpha',\ k')}{F} = \frac{\pi F(\alpha',\ k')}{\nu' F'} = \frac{2a' \vartheta(o,\ \nu')^2}{\nu' . \vartheta(o,\ \nu')^2} = \frac{2a'}{\nu'}$$

Daher:

$$\frac{\nu'}{2} l' \vartheta(\alpha',\ \nu') + a' = W$$

Dabei ist

$$a' = \frac{\pi . F(\alpha',\ k')}{2F'}$$

Nun ist:

$$\vartheta_2(ai,\ \nu) = \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}} \cdot e^{\frac{a'^2}{\nu'}} \cdot \vartheta(a',\ \nu')$$

$$ln\, \vartheta_2(ai,\ \nu) = ln \sqrt{\frac{\nu'}{\pi}} + \frac{a'^2}{\nu'} + lu\, \vartheta(a',\ \nu')$$

$$\frac{d l \vartheta_2(ai,\ \nu)}{da} = \frac{2a'}{\nu'} \cdot \frac{da'}{da} + \frac{d l \vartheta(a',\ \nu')}{da'} \cdot \frac{da'}{da}$$

$$\frac{da'}{da} = \sqrt{\frac{\nu'}{\nu}};$$

daher:

$$\frac{d l \vartheta_2(ai,\ \nu)}{da} = \frac{2a'}{\sqrt{\nu \nu'}} + \frac{d l \vartheta(a',\ \nu')}{da'} \cdot \sqrt{\frac{\nu'}{\nu}}$$

Mithin:

$$\frac{\nu'}{2} l' \vartheta(a',\ \nu') + a' = \frac{\pi}{2} \frac{d l \vartheta_2(ai,\ \nu)}{da}$$

Daher auch:

$$W = \frac{\pi}{2} \frac{d l \vartheta_2(ai,\ \nu)}{da}$$

Dabei ist:

$$a = a' \sqrt{\frac{\nu'}{\nu}} = a' . \sqrt{\frac{\nu \nu'}{\nu'^2}} = a' . \frac{\pi}{\nu'} = a' . \frac{F'}{F}$$

Da nun:

$$a' = \frac{\pi . F(\alpha',\ k')}{2F'}$$

ist, so

$$a = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(\alpha',\ k')}{F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right)}$$

Daher auch:

$$F = 2\pi - 2(\nu' l' \vartheta(a',\ \nu') + 2a')$$

oder aber:

$$F = 2\pi - 2\pi \cdot \frac{dl \cdot \vartheta_2(ai,\ \nu)}{da},$$

$$= 2\pi \left\{ 1 - \frac{dl\vartheta_2(ai,\ \nu)}{da} \right\}.$$

§ 3. Indirecte Methode zur Bestimmung des Flächeninhaltes vom betreffenden Stücke der Kugelfläche.

Zur Bestimmung des Flächeninhaltes der von dem Tangentenkegel aus der Kugel ausgeschnittenen sphärischen Ellipse kommt uns ein Princip wesentlich zu Statten, dessen Hesse am Ende seiner 22. Vorlesung über analytische Geometrie des Raumes Erwähnung tut. Dasselbe lautet:

Die Summe des Flächeninhaltes einer sphärischen geschlossenen Curve und des Umfanges ihrer Polarcurve ist gleich 2π. Man kann mithin von dem letzteren auf den gesuchten Flächeninhalt der ursprünglich gegebenen sphärischen Curve schliessen. Da sich nun der Flächeninhalt einer sphärischen Curve als ein Doppelintegral, der Umfang der Polarcurven dagegen als ein einfaches Integral darstellt, so wird durch die Berechnung des letzteren ein bedeutender Vorteil errungen.

Unter Polarcurve einer auf einer Kugel gegebenen Curve versteht man diejenige, welche von dem grössten Kreise berührt wird, dessen Pol die gegebene Curve beschreibt. Wenn daher die gegebene Curve von einem Kegel ausgeschnitten wird, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Kugel liegt, so wird die Polarcurve von dem Kegel ausgeschnitten, welcher beschrieben wird von den in der Spitze dieses Kegels auf seinen Tangentenebenen errichteten Normalen.

Nach 15 der 14. Vorlesung des genannten Werkes von Hesse lautet aber die Gleichung des Polarkegels von

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

ebenso wie die reciproke Function der linken Seite gleich Null gesetzt, also:

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 = 0$$

Hierbei ist nach Früherem

$$\alpha > \beta.$$

Es ist daher unsere Aufgabe, die Grösse der Curve zu berechnen, in welcher sich dieser Kegel schneidet mit der Kugelfläche:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

Um nun den Ausdruck für die Länge des Bogenelements

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

im vorliegende Falle möglichst einfach zu gestalten, führen wir die neue Variabele v ein, welche mit den anderen den Zusammenhang haben soll, dass:

$$\frac{\alpha^2x^2}{1+\alpha^2v}+\frac{\beta^2y^2}{1+\beta^2v}-\frac{\gamma^2z^2}{1-\gamma^2v}=0$$

sei. Da ausserdem:

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\gamma^2z^2=0$$
$$x^2+y^2+z^2=1$$

ist, so lassen sich aus diesen 3 Gleichungen x^2, y^2 und z^2 eindeutig bestimmen.

Es ist:

$$\Delta x^2=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\beta^2}{1+\beta^2v} & \frac{-\gamma^2}{1-\gamma^2v} \\ 0 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{\beta^2\gamma^2}{1+\beta^2v}+\frac{\beta^2\gamma^2}{1-\gamma^2v}$$
$$=\frac{\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)v}{(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}$$

wobei:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2v} & \frac{\beta^2}{1+\beta^2v} & \frac{-\gamma^2}{1-\gamma^2v} \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2v}(\beta^2+\gamma^2)-\frac{\beta^2}{1+\beta^2v}(\alpha^2+\gamma^2)-\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2v}(\alpha^2-\beta^2)$$
$$=\frac{v\{\alpha^2(\beta^4-\gamma^4)+\beta^2(\gamma^4-\alpha^4)-\gamma^2(\alpha^4-\beta^4)\}}{(1+\alpha^2v)(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}$$

Die Klammer des Zählers lässt sich noch vereinfachen. Dieselbe ist nämlich:

$$=-\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)-\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)$$

Addire ich hierbei $\gamma^2\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)$ und subtrahire es gleichzeitig, so erhalte ich:

$$\begin{aligned}&-\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)+\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)-\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)\\&+\alpha^2\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)\qquad\qquad-\gamma^2\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)\\&=-(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)\end{aligned}$$

Mithin:

$$x^2=\frac{-\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)(1+\alpha^2v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

Ebenso findet man:

$$y^2=\frac{\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)(1+\beta^2v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

$$z^2=\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)(1-\gamma^2v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man

$$(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)=N$$

setzt,

$$dx=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)}{N(1+\alpha^6v)}}\,\alpha^2\,dv$$

$$dy=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma^2\alpha^2(\gamma^2+\alpha^2)}{N(1+\beta^2v)}}\,\beta^2\,dv$$

$$dz=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}{N(1-\gamma^2v)}}\,.\,-\gamma^2\,dv$$

Daher:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

$$=\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\sqrt{\left\{\frac{-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)}{1+\alpha^2v}+\frac{\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)}{1+\beta^2v}-\frac{\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)}{1-\gamma^2v}\right\}\frac{1}{N}}\,.\,dv$$

Mithin, wenn man auf gleiche Benennung bringt:

$$ds=\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\,.\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2v)(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}}\,.\,dv$$

Also:

$$s=\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2v)(1+\beta^2v)(1-\gamma^2v)}}\,.\,dv$$

Bei diesem Integrale ist nun sowohl die Bestimmung des Vorzeichens wie die der Grenze auszuführen. Beides geschieht folgendermassen.

Die Länge des Bogenelementes war in der ursprünglichen Form gegeben:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Mit Hülfe der beiden Gleichungen

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

lässt sich offenbar diese Gleichung in die folgende umwandeln:

$$ds = f(x)\,dx,$$

wo $f(x)$ eine positive reelle Function von x bedeutet. Daraus ist ersichtlich, dass $f(x)\,dx$ durch die Gleichung:

$$x^2 = \frac{-\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)(1+\alpha^2 v)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

transformirt werden kann in den Ausdruck:

$$\pm\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}}\cdot dv$$

Da $f(x)$ positiv ist, so wird bei dieser Transformation auch der daher rührende Wurzelausdruck positiv zu nehmen sein. Es hängt mithin die Wahl des Vorzeichens nur davon ab, ob bei der Transformation von dx ein positiver oder negativer Ausdruck zum Vorschein kommt. Nun nimmt aber, wie sich aus der obigen Gleichung zwischen x und v ergiebt, v mit zunehmendem x ab, mithin ist jedenfalls:

$$dx = -f_1(v)\,dv,$$

wo $f_1(v)$ einen positiven reellen Ausdruck bedeutet. Daher ist in obiger Gleichung für s das negative Zeichen zu wählen. Mithin:

$$s = \int f(x)\,dx = -\frac{\alpha\beta\gamma}{2}\int\sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}}\,dv$$

Bezüglich der Grenzbestimmung kann man ebenfalls von dem Integrale $\int f(x)\,dx$ ausgehen. Die Grenzen von x bestimmen sich aus der Gleichung der Projection der Curve auf die xy Ebene. Dieselbe lautet:

$$(\alpha^2+\gamma^2)x^2 + (\beta^2+\gamma^2)y^2 = \gamma^2$$

Weil diese Projection eine Ellipse ist, so wird das Integral, welches blos über die aus dieser Gleichung sich bestimmenden positiven x auszudehnen ist, den 4ten Teil desjenigen Integrales betragen, welches sich über alle x erstreckt, die der Gleichung genügen. Nun erstreckt sich aber das positive x von 0 bis $+\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}$, mithin:

$$s = 4 \int_0^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}} f(x)\,dx$$

Transformiren wir nun den zu integrirenden Ausdruck auf v, so bestimmen sich die Grenzen von v leicht aus der Gleichung:

$$x^2 = \frac{-\beta^2\gamma^2(1+\alpha^2 v)(\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha^2-\beta^2)(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)}$$

nämlich:

$$v = -\frac{1}{\alpha^2} \quad \text{für} \quad x = 0$$

$$v = -\frac{1}{\beta^2} \quad \text{für} \quad x = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}$$

Daher:

$$s = 4\int_0^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}}} f(x)\,dx = -2\alpha\beta\gamma \int_{-\frac{1}{\alpha^2}}^{-\frac{1}{\beta^2}} \sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}}\cdot dv$$

$$= 2\alpha\beta\gamma \int_{-\frac{1}{\beta^2}}^{-\frac{1}{\alpha^2}} \sqrt{\frac{-v}{(1+\alpha^2 v)(1+\beta^2 v)(1-\gamma^2 v)}}\cdot dv$$

Substituirt man hierin:

$$-v = \frac{1}{z}$$

$$dv = \frac{dz}{z^2},$$

so geht das Integral über in:

$$s = 2\alpha\beta\gamma \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}}$$

Um dieses Integral auf die Normalform zu reduciren, substituirt man:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2} = k^2; \quad \frac{z-\beta^2}{z+\gamma^2} = k^2\sin^2\varphi$$

$$z = \frac{\beta^2(\alpha^2+\gamma^2)+\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\varphi}{\alpha^2+\gamma^2-(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\varphi}$$

Alsdann ist:

$$\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

und

$$2\alpha\beta\gamma \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}}$$

$$= \frac{4\alpha\beta\gamma}{\beta^2\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$-k^2\sin^2\varphi+1 : \frac{\gamma^2}{\beta^2}k^2\sin^2\varphi+1$$

$$= -\frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}}{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\sin^2\varphi}$$

Daher:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= -\frac{\beta^2}{\gamma^2}K + \frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma^2}\,\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\right)$$

Folglich:

$$2\alpha\beta\gamma \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{dz}{z\sqrt{(z-\alpha^2)(z-\beta^2)(z+\gamma^2)}}$$

$$= 4\left\{-\frac{\alpha\beta}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}K + \frac{\alpha(\beta^2+\gamma^2)}{\beta\gamma\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}\,\Pi_1\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot k^2\right)\right\}$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck ist identisch mit dem in § 2. S. 143. für W gefundenen. Um nun den gesuchten Flächeninhalt der ursprünglich gegebenen sphärischen Curve zu erhalten, ist $4.W$ zu subtrahiren; mithin erhält man auch auf diese Weise:

$$F = 2\pi - 4W.$$

§ 4. Berechnung eines numerischen Beispiels.

Der gegebene leuchtende Punkt habe die Coordinaten:

$$x = 6; \quad y = 9; \quad z = 15.$$

Das Ellipsoid aber besitze die Axen:

$$a = 2; \quad b = 5; \quad c = 8.$$

Alsdann ist zunächst die Gleichung des vom Punkte (6, 9, 15) an das Ellipsoid gelegten Tangentenkegels aufzustellen.

Die Form dieser Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

wo α, β, γ die 3 Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\frac{36}{4+\lambda} + \frac{81}{25+\lambda} + \frac{225}{64+\lambda} - 1 = 0$$

sind. Unsere nächste Aufgabe ist mithin, diese Gleichung aufzulösen

Wenn wir dieselbe nach Potenzen von λ ordnen, so lautet sie:

$$\lambda^3 - 249\lambda^2 - 13281\lambda - 94436 = 0$$

Substituirt man hierin:

$$\lambda = u + 83,$$

so geht dieselbe über in:

$$u^3 - 33948u - 2340333 = 0$$

Setzt man nun den Coefficienten von $u = p$ und das absolute Glied $= q$, so sind nach der Theorie der Gleichungen die durch die Gleichung $u^3 - pu - q = 0$ bestimmten Werte von u:

$$u_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\alpha;$$

$$u_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60-\alpha)$$

$$u_3 = \quad 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60+\alpha),$$

wobei

$$\sin 3\alpha = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}$$

ist. Mithin:

$$\sin 3\alpha = \frac{7020999}{67896\sqrt{11316}}$$

$\log 11316$	$= 4{,}0536929$
$\log \sqrt{11316}$	$= 2{,}0268465$
$\log 67896$	$= 4{,}8318442$
$\log (67896 . \sqrt{11316})$	$= 6{,}8586907$
$\log (7020999)$	$= 6{,}8463989$
$\log \sin 3\alpha$	$= 9{,}9877082$
3α	$= 76^0\ 25'\ 57''$
α	$= 25^0\ 28'\ 39''$

Nun:

$$u_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\alpha.$$

Dabei:

$\log \sin\alpha$	$= 9{,}6336266$
$\log \sqrt{\frac{p}{3}}$	$= 2{,}0268465$
$\log 2$	$= 0{,}3010300$
$\log \left(\sin\alpha \sqrt{\frac{p}{3}} . 2\right)$	$= 1{,}9615031$
num.	$= 91{,}5173$

$u_1 = -91{,}5173$; $\lambda_1 = -8{,}5173$

$$u_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60-\alpha)$$

$\log \sin (60-\alpha)$	$= 9{,}7533761$
$\log \sqrt{\frac{p}{3}}$	$= 2{,}0268465$
$\log 2$	$= 0{,}3010300$
$\log \left(2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60-\alpha)\right)$	$= 2{,}7812526$
num.	$= 120{,}5737$

$u_2 = -120{,}5737$; $\lambda_2 = -37{,}5737$

$$u_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} . \sin(60+\alpha)$$

$$\log \sin(60+\alpha) = 9{,}9986457$$
$$\log \sqrt{\frac{p}{3}} = 2{,}0268465$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \left(2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin(60+\alpha)\right) = 2{,}3265222$$

$$u_3 = 212{,}0910; \quad \lambda_3 = 295{,}0910$$

Nach unseren früheren Bestimmungen (cf. S. 151) ist nun:

$$\alpha^2 = 37{,}5737$$
$$\beta^2 = 8{,}5173$$
$$\gamma^2 = 295{,}0910$$

Aus diesen Grössen berechnen sich k und die damit zusammenhängenden Modulen.

Es ist nämlich:

$$k^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \gamma^2} = \frac{29{,}0564}{332{,}6647}$$

$$\log 29{,}0564 = 1{,}4632418$$
$$\log 332{,}6647 = 2{,}5220067$$
$$\log k^2 = 8{,}9412351$$
$$\log k = 9{,}4706176$$

Setzt man $k = \sin\alpha$, so ist also auch:

$$\log \sin\alpha = 9{,}4706176$$
$$\alpha = 17^0\, 11'\, 24''$$

Nach diesen vorbereitenden Rechnungen können wir zur näheren Bestimmung der Grösse W übergehen.

$$W = \frac{\nu'}{2} \cdot l'\vartheta(a', \nu') + a'$$

$$a' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{F(\alpha', k')}{K'}$$

Dabei ist α' durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\gamma}{\beta} = \sqrt{\frac{295{,}0910}{8{,}5173}} \quad \text{(cf. S. 142).}$$

$$\begin{aligned} \log\ 295{,}0910 &= 2{,}4699560 \\ \log\ 8{,}5173 &= 0{,}9303019 \\ \hline \log \operatorname{tg}^2\alpha' &= 1{,}5396541 \\ \log \operatorname{tg}\alpha' &= 0{,}7698270 \\ \alpha' &= 80^0\ 21'\ 28'',66 \end{aligned}$$

Mithin haben wir für die Bestimmung von α'

1) Das unvollständige Integral $\int_0^{80^0\,21'\,28'',66} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}$

2) Das vollständige Integral K' zu berechnen.

ad 1). Für die Berechnung von $F(\alpha', k')$, welches wir mit u' bezeichnen wollen, benutzen wir, da die obere Grenze des Integrals zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, die Formel:

$$u' = \frac{\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\xi}{2 \log e \cos \frac{\beta^4}{2}}$$

und

$$\log u' = \log(\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\xi) + 0{,}06118570 - 4 \log \cos \frac{\beta}{2}$$

dabei ist

$$k' = \sin\alpha = \cos\alpha; \quad \alpha = 17^0\ 11'\ 24'';$$

$$\sqrt{\sin\alpha} = \sqrt{\cos\alpha} = \cos\beta$$

$$\sin\alpha \,.\, \sin\varphi = \sin\gamma; \quad \varphi = 80^0\ 21'\ 28'',66$$

$$\frac{\cos\beta \,.\, \cos\varphi}{\cos\gamma} = \operatorname{tg}\delta$$

$$\sin\xi = \operatorname{tg}\frac{\beta^2}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right)$$

(cf. Schellbach, Lehre d. ell. Int. § 49.)

$$\log\cos\beta = \log\sqrt{\sin\alpha} = 9{,}9900767;$$

$$\beta = 12^0\ 12'\ 5''_{1}7$$

$$\frac{\beta}{2} = 6^0\ 6'\ 2'',85$$

$\log \sin a = 9{,}9801534$

$\log \sin \varphi = 9{,}9938195$

$\log \sin \gamma = 9{,}9739729$; $\gamma = 70^0\ 21'\ 40'',82$

$\log \cos \beta = 9{,}9900767$

$\log \cos \varphi = 9{,}2239942$

$-\log \cos \gamma = 0{,}4735480$

$\log \operatorname{tg} \delta = 9{,}6876189$; $\delta = 25^0\ 58'\ 14'',71$

$\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) = 0{,}4623768$

$2 \log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 8{,}0578184$

$\log \sin \xi = 8{,}5201952$

Da $\log \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}$ positiv sein muss, so liegt ξ im 2ten Quadranten, daher :

$$\xi = 178^0\ 6'\ 5'',60$$

$$\frac{\xi}{2} = 89^0\ 3'\ 2'',80$$

$\log \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = 1{,}7807154$

$\log\left(\log \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}\right) = 0{,}2505945$

$-4 \log \cos \frac{\beta}{2} = -9{,}9901336$

$0{,}2604609$

$0{,}0611857$

$\log u' = 0{,}3216466$

$u' = 2{,}097232$

ad 2). $K' = \dfrac{ln\, 2 + 2\, ln \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{2 \cos \frac{\beta^4}{2}}$

$$K' = \frac{0{,}1501515 + \log \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\log e \cdot \cos \frac{\beta^4}{2}}$$

$$\log K' = \log\left(0{,}1501515 + \log \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}\right) + 0{,}36221569 - 4 \log \cos \frac{\beta}{2}$$

(cf. Schellbach, L. d. ell. Integr. § 49.).

Dabei

$$\sqrt{\sin a} = \cos \beta.$$

Mithin:

$$\frac{\beta}{2} = 6^0\ 6'\ 2'',85$$

$$\log \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = 0{,}9710908$$

$$0{,}1505150$$

$$a = 1{,}1216058$$

$$\log a = 0{,}0498399$$

$$0{,}3622157$$

$$-4 \log \cos \frac{\beta}{2} = 0{,}0098664$$

$$\log K' = 0{,}4219220$$

$$K' = 2{,}641934$$

Nun:

$$a' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u'}{K'}$$

$$\log \frac{\pi}{2} = 0{,}1961199$$

$$\log u' = 0{,}3216466$$

$$\log K' = 0{,}4219220$$

$$\log a' = 0{,}0958245$$

$$a' = 1{,}246937$$

Es erübrigt uns nun noch $\frac{\nu'}{2} l' \vartheta(a', \nu')$ zu berechnen.

$$l' \vartheta(a', \nu') = \frac{\vartheta'(a', \nu')}{\vartheta(a', \nu')}$$

$$\vartheta(a', \nu') = 1 - 2q' \cos 2a' + 2q'^4 \cos 4a' - 2q'^9 \cos 6a' + \ldots$$

$$\vartheta'(a', \nu') = 4\{q' \sin 2a' - 2q'^4 \sin 4a' + 3q'^9 \sin 6a' \ldots$$

$$\frac{\vartheta'(a', \nu')}{\vartheta(a', \nu')} = 4 \cdot \frac{q' \sin 2a' - 2q'^4 \sin 4a' + 3q'^9 \sin 6a' - \ldots}{1 - 2q' \cos 2a' + 2q'^4 \cos 4a' - 2q'^9 \cos 6a' + \ldots}$$

Daher:

$$\frac{\nu'}{2} l' \vartheta(a', \nu') = 2\nu' V,$$

wo

$$V = \frac{q' \sin 2a' - 2q'^4 \sin 4a' + 3q'^9 \sin 6a' - \ldots}{1 - 2q' \cos 2a' + 2q'^4 \cos 4a' - 2q'^9 \cos 6a' + \ldots}$$

Wir werden zunächst q' und daraus ν' berechnen und dann a' in Graden ausdrücken.

$$q' = \lambda' + 2\lambda'^5 + 15\lambda'^9 + \ldots$$

$$\lambda' = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta'^2}{2}$$

$$\cos \beta' = \sqrt{\cos a} = \sqrt{\sin \alpha} = \sqrt{\sin 17^0\ 11'\ 24''}$$

$$\log \sin 17^0\ 11'\ 24'' = 9{,}4706182$$
$$\log \cos \beta' = 9{,}7353091$$

$$\beta' = 57^0\ 4'\ 6'',31$$

$$\frac{\beta'}{2} = 28^0\ 32'\ 3'',15$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta'}{2} = 9{,}7353826$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta'^2}{2} = 9{,}4707652$$
$$\log \tfrac{1}{2} = 9{,}6989700$$

$$\log \lambda' = 9{,}1697352$$
$$\lambda' = 0{,}147806$$

$$\log \lambda'^5 = 5{,}8486750 - 10$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log (2\lambda'^5) = 61497050 - 10$$
$$2\lambda'^5 = 0{,}0001412$$
$$\log \lambda'^9 = 2{,}5276168 - 10$$
$$\log 15 = 1{,}1760913$$

$$\log (15\lambda'^9) = 3{,}7037081 - 10$$
$$\text{num.} = 0{,}0000005$$

Daher

$$q' = 0{,}1478206 + 0{,}0001412 + 0{,}0000005 = 0{,}1479623$$

$\log q' = 9{,}1701511$

$v' = -ln\, q'$

$ln\, q' = \log q \,.\, 2{,}3025851$

$v' = -\,9{,}1701511\,.\,2{,}3025851 = 0{,}8298489\,.\,2{,}3025851$

$\log 0{,}8298489 = 9{,}9189991$

$\log 2{,}3025851 = 0{,}3622156$

$\log v' = 0{,}2812147$

$v' = 1{,}910798$

Um a' in Graden auszudrücken, ist zu bemerken, dass

$$a' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u'}{K'} \quad \text{ist.}$$

Da nun $\pi = 180^0$ ist, so

$$a' = 90^0 \cdot \frac{u'}{K'}$$

$\log 90 = 1{,}9542425$

$\log u' = 0{,}3216466$

$\log K' = 0{,}4219220$

$$\log\left(\frac{90u'}{K'}\right) = 1{,}8539671$$

mithin:

$$a' = 71^0\ 26'\ 39'',\ 19$$

Wenn wir nun zur Berechnung von V übergehen, so brauchen sowohl im Zähler wie im Nenner die Glieder von demjenigen an nicht mehr berücksichtigt werden, welches q'^9 als Factor enthält.

$\log q' = 9{,}1701511$

$\log \sin 2a' = 9{,}7805828$

$\log(q' \sin 2a') = 8{,}9507339$; num. $= 0{,}08927584$

$\log 2q'^4 = 6{,}9816374$

$\log \sin 4a' = 9{,}9833230$

Das Product $2q' . \sin 4a'$ ist negativ, weil $4a'$ im 4. Quadranten liegt.

$\log(2q'^4 . \sin 4a') = 6{,}9649604$; num. $= -\,0{,}0009225$

$$q' \sin 2a' - 2q'^4 \sin 4a' = 0{,}0901983$$

$\log 2q' = 9{,}4711811$
$\log\cos 2a' = 9{,}9017102$
Das Product $2q'.\cos 2a'$ ist negativ, weil $2a'$ im zweiten Quadranten liegt.

$\log(2q'\cos 2a') = 9{,}3728913$; num. $= -0{,}2359889$

$\log 2q'^4 = 6{,}9816374$
$\log\cos 4a' = 9{,}4343802$

$\log(2q'^4\cos 4a') = 6{,}4160176$; num. $= 0{,}0002607$

$$1 - 2q'\cos 2a' + 2q'^4\cos 4a' = 1{,}2362496$$

Daher:

$$V = \frac{0{,}0901983}{1{,}2362496}$$

$\log 0{,}0901983 = 8{,}9551983$
$\log 1{,}2362496 = 0{,}0921413$

$\log V = 8{,}8630570$
$\log \nu' = 0{,}2812147$
$\log 2 = 0{,}3010300$

$$\log\left\{\frac{\nu'}{2} l'\vartheta(a', \nu')\right\} = 9{,}4453017$$

$$\frac{\nu'}{2} l'\vartheta(a', \nu') = 0{,}2788058$$

Daher:

$$W = \frac{\nu'}{2} = l)\vartheta(a', \nu') + a'$$
$$= 0{,}2788058 + 1{,}246937$$
$$= 1{,}5257428$$

$$F = 2\pi - 4W = 6{,}2831853$$
$$- 6{,}1029712$$
$$F = 0{,}1802141.$$